A.1. $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$

et $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$

$= \frac{1}{1} = 1$, d'où

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 + \ln(1) = 0 + 0 = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

A.2 Soit $x \geq 1$.

Sachant $\left(\frac{1}{u(x)}\right)' = -\frac{u'(x)}{u(x)^2}$

et $\left(\ln(u(x))\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$,

on obtient

$$f'(x) = -\frac{(x+1)'}{(x+1)^2} + \frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)'}{\left(\frac{x}{x+1}\right)}$$

$$= -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x+1}{x} \times \left(\frac{x}{x+1}\right)'$$

$$= -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x+1}{x} \times \frac{x'(x+1) - x\,(x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x+1}{x} \times \frac{x+1-x}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x+1}{x} \times \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{x}{x(x+1)^2} + \frac{x+1}{x(x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{x(x+1)^2}$$

A3. D'après A2), $\forall x \in [1;+\infty[$ $f'(x) > 0$

d'où :

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}+\ln\left(\frac{1}{2}\right)$	$\nearrow$	0

d'où : $\forall x \in [1;+\infty[$ $f(x) < 0$

B1. $n = 3$

$u = 0$

$i = 1$; $u := u + \frac{1}{i} = 0 + \frac{1}{1} = 1$;

$i = 2$; $u := u + \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$;

$i = 3$; $u := u + \frac{1}{i} = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$

B.2. Variables : i et n entiers naturels.
u réel

Entrée : Demander à l'utilisateur n.

Initialisation : Affecter à u la valeur 0.

Traitement : Pour i variant de 1 à n
Affecter à u la valeur $u + \frac{1}{i}$

Traitement : Affecter à u la valeur $u - \ln(n)$.

Sortie : Afficher u

B.3. Conjecture : la suite (u_n) est décroissante et convergente vers α avec $\alpha \simeq 0{,}57$.

C1. $$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n} + \ln(n)$$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = f(n)$$

$n \geq 1$ d'où avec A3, $f(n) < 0$ et par suite

$$u_{n+1} - u_n < 0 \quad ; \quad u_{n+1} < u_n .$$

: la suite (u_n) est strictement décroissante.

C2a Pour $(0<)\ k \leqslant x \leqslant k+1$, on a

$$\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{x} \quad ; \quad \frac{1}{k} - \frac{1}{x} \geqslant 0 .$$

Par suite, d'après le lemme de positivité des intégrales,

$$\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x} \right) dx \geqslant 0$$

et par linéarité $$\int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dx \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx$$

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leqslant \frac{1}{k} \left[x \right]_k^{k+1}$$

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leqslant \frac{1}{k} \times 1$$

$$\left[\ln x \right]_k^{k+1} \leqslant \frac{1}{k}$$

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k} .$$

C2b D'après C2a

$$\begin{array}{lll} (k=1) & \ln(2)-\ln(1) \leq 1 \\ (k=2) & \ln(3)-\ln(2) \leq \frac{1}{2} \\ (k=3) & \ln(4)-\ln(3) \leq \frac{1}{3} \\ & \vdots \\ (k=n) & \ln(n+1)-\ln(n) \leq \frac{1}{n} \end{array}$$

Par addition terme à terme et sachant $\ln(1)=0$,

$$\ln(n+1) \leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}$$

C2c Avec C2b,

$$1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\ln(n) \geqslant \ln(n+1)-\ln(n)$$

$$u_n \geqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Sachant $\frac{n+1}{n}>1$, on a $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)>0$ et par suite

$$u_n>0.$$

C3. La suite (u_n) est décroissante (C1) et minorée par 0 (C2c) donc la suite (u_n) est convergente.